

**DiffEq - Ch 8 - Required Practice**  
**(Note: there are multiple correct solutions for most problems)**

**ANSWERS ONLY**

**8.1**

$$\#1. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \vec{X} \quad \left( \vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right)$$

$$\#2. \vec{X}' = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -9 \\ 6 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{X} \quad \left( \vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$$

$$\#3. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} t-1 \\ -3t^2 \\ t^2-t+2 \end{bmatrix}$$

$$\#4. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 2y + e^t \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 3y - e^t \end{aligned}$$

$$\#5. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - y + 2z + e^{-t} - 3t \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y + z + 2e^{-t} + t \\ \frac{dz}{dt} &= -2x + 5y + 6z + 2e^{-t} - t \end{aligned}$$

#6. (show verification steps)

#7. (show verification steps)

#8. (show verification steps)

#9. These do form a fundamental set

#10. (show verification steps)

**8.2 day 1**

$$\#1. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} e^t$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-10t} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{8t}$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\#5. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$\#6. \vec{X} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}$$

**8.2 day 2**

$$\#1. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + C_3 \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{5t} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t} \right)$$

$$\#5. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right) + C_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t \right)$$

$$\#6. \vec{X} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 26 \\ 13 \end{bmatrix} t e^{4t}$$

### 8.2 day 3

$$\#1. \vec{X} = C_1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t \right) e^{4t} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t \right) e^{4t}$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \left( \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \cos 3t - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \sin 3t \right) + C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) + C_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 28 \\ -5 \\ 25 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^{-2t} + C_3 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) e^{-2t}$$

$$\#5. \vec{X} = -2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e^{5t} - 5 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e^{5t}$$

**8.3 day 1**

$$\#1. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - 2 \\ \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t + \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} e^{7t} + \begin{bmatrix} \frac{55}{36} \\ -\frac{19}{4} \end{bmatrix}$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ -2 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$\#5. \vec{X} = -13 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**8.3 day 2**

$$\#1. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} te^t + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t \right) - C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sin t \right) + \begin{bmatrix} t \cos t - \sin t \ln |\cos t| \\ t \sin t + \cos t \ln |\cos t| \end{bmatrix}$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} te^t$$

### 8.3 day 3

$$\#1. \vec{X} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} t e^{4t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} t e^{2t}$$

### 8.3 day 4

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 + e^x \end{bmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

#1.

$$\text{where } \vec{X} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}$$

**Ch8 Test Review**

$$\#1. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\#2. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{8t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-10t}$$

$$\#3. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

$$\#4. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#5. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{2t} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} \right)$$

$$\#6. \vec{X} = -7 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{4t} + 13 \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \right)$$

$$\#7. \vec{X} = C_1 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin t \right) + C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$\#8. \vec{X} = C_1 \left( \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \cos 3t - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \sin 3t \right) + C_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \sin t \right)$$

$$\#9. \vec{X} = -2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e^{5t} - 5 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 2t \right) e^{5t}$$

$$\#10. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} e^{7t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 55/36 \\ -19/4 \end{bmatrix} e^t$$

$$\#11. \vec{X} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} e^t \right) + \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$\#12. \vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t^3 - 4t \end{bmatrix}, \quad \vec{X}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{where } \vec{X} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{bmatrix}$$